VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

2. Dinamica structurilor: sisteme cu un grad de libertate dinamică

2.1. Ecuații de mişcare, formularea problemei, metode de rezolvare

Dinamica structurilor are ca obiectiv determinarea răspunsului (eforturilor şi deplasărilor) structurilor supuse unor încărcări dinamice. Încărcarea dinamică este o încărcare a cărei mărime, direcție, sens sau punct de aplicare variază în timp.

2.1.1. Sisteme cu un singur grad de libertate dinamică

Multe tipuri de structuri inginereşti pot fi idealizate ca şi structuri relativ simple, care facilitează determinarea răspunsului dinamic. Un exemplu este castelul de apă din Figura 2.1a. Această structură poate fi schematizată ca si o masă *m* fixată la capătul superior al unei console fără masă, dar de rigiditate *k* (vezi Figura 2.1b). Obiectivul dinamicii structurilor este determinarea deplasărilor şi eforturilor în acest pendul inversat atunci când asupra masei acționează o forță dinamică laterală (orizontală), sau atunci când o mişcare seismică orizontală acționează la baza consolei. Sistemul structural din Figura 2.1b este un sistem cu un singur grad de libertate dinamică (GLD).

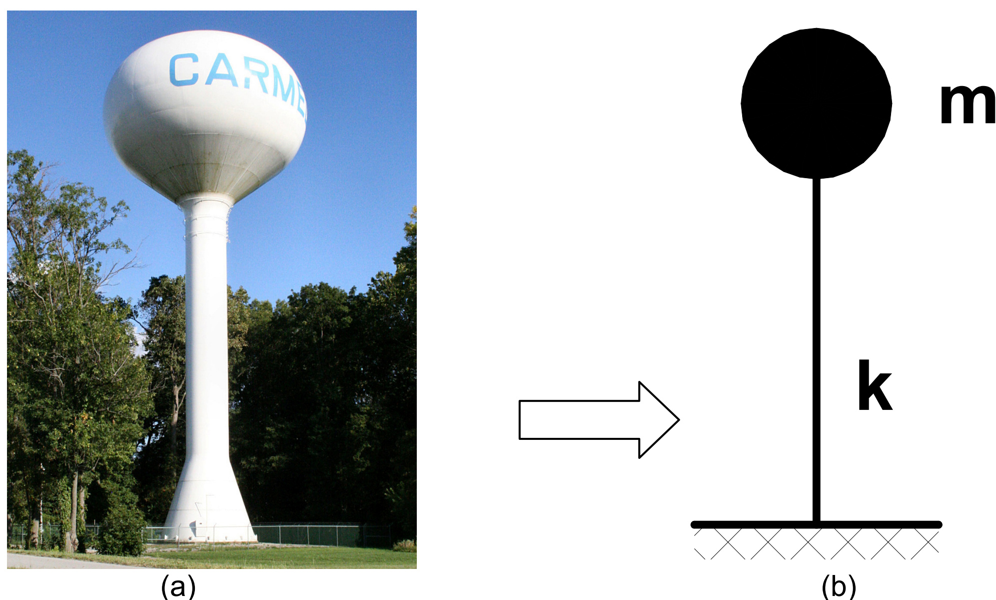


Figura 2.1. Un castel de apă (a), http://en.wikipedia.org/wiki/Water_tower şi idealizarea acestuia sub forma unui pendul inversat (b).

Numărul de **grade de libertate dinamică (GLD)** necesare într-o analiză dinamică a unei structuri este numărul de deplasări independente necesare pentru definirea poziției deplasate a maselor față de poziția lor inițială.

Pe lângă castelul de apă din Figura 2.1a, multe alte tipuri de structuri pot fi idealizate ca şi structuri cu un singur grad de liberate dinamică (SGLD). Un exemplu este cadrul parter reprezentat în Figura 2.2, care poate fi idealizat ca şi un sistem format dintr-o masă *m* concentrată la nivelul acoperişului, un cadru fără masă care oferă rigiditate sistemului şi un amortizor care disipează energia de vibrație a sistemului. Într-o structură reală fiecare element structural (grinda şi stâlpii) contribuie la masa, rigiditatea şi amortizarea structurii. În schema idealizată în schimb, fiecare dintre aceste proprietăți este concentrată într-o componentă separată: componenta de masă, componenta de rigiditate şi componenta de amortizare.

Este de menționat faptul că numărul de grade de libertate dinamice este în general diferit de gradul de nedeterminare geometrică (sau gradele de libertate) folosit(e) la determinarea eforturilor în structură prin metoda deplasărilor (o problemă de statică). Astfel, cadrul din Figura 2.2 are un singur grad de libertate dinamică (deplasarea laterală a masei concentrate la nivelul acoperişului), în schimb gradul de nedeterminare statică este egal cu trei (două rotiri de noduri şi o deplasare laterală).

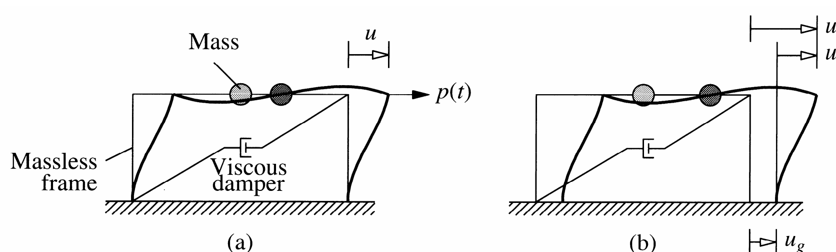


Figura 2.2. Un sistem cu un singur grad de libertate dinamică sub acțiunea unei forțe dinamice p(t) [a]; şi a unei mişcări seismice la bază structurii [b].

Vor fi considerate două tipuri de încărcare dinamică: (1) o forță dinamică *p(t)* după direcția orizontală (vezi Figura 2.2a) şi (2) o mişcare seismică orizontală $u_g(t)$ aplicată la baza structurii (vezi Figura 2.2b). În ambele cazuri *u* reprezintă deplasarea laterală între masă şi baza structurii.

2.1.2. Relația forță-deplasare

Să considerăm structura din Figura 2.3a asupra căreia acționează forța statică f_S pe direcția gradului de libertate *u*. Determinarea relației dintre forța f_S şi deplasarea *u* este o problemă clasică de statica construcțiilor.

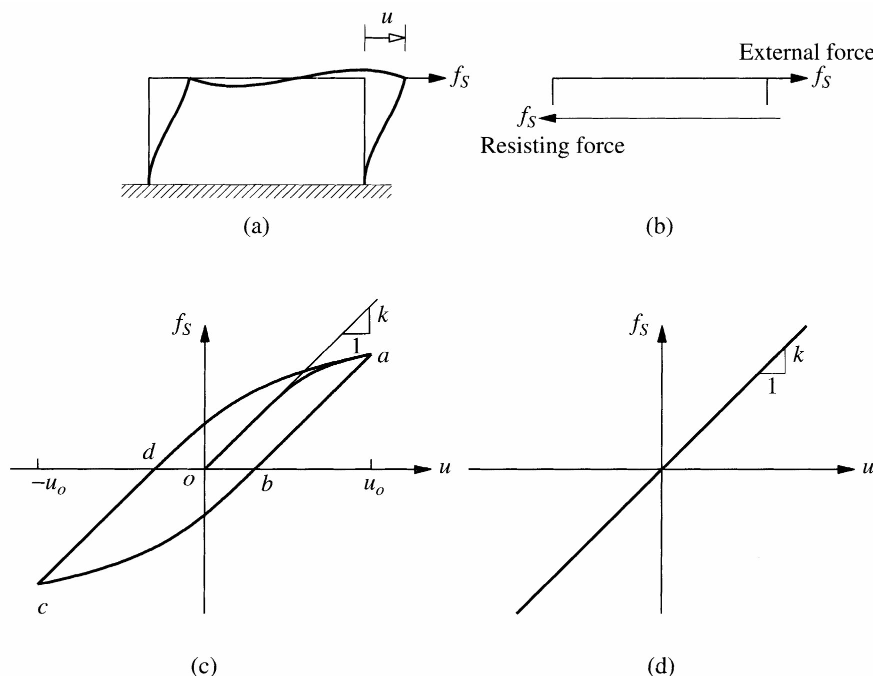


Figura 2.3. Relații forță-deplasare (Chopra, 2001).

În cazul unui sistem **liniar elastic** (vezi Figura 2.3d) materialul din care este compusă structura are o comportare elastică, iar eforturile în structură se determină pe baza ipotezei deplasărilor mici, folosind un calcul de ordinul I. Pentru un astfel de sistem relația dintre forța f_S şi deplasarea *u* este liniară:

$$f_S = k \cdot u \tag{2.1}$$

unde *k* este rigiditatea laterală a sistemului, unitățile acesteia fiind forță/lungime.

În cazul unor structuri reale, elementele structurale pot intra în curgere la deformații mari, curba de descărcare şi reîncărcare diferind de curba de încărcare inițială. Acest efect se datorează comportării plastice a materialului, iar un sistemul corespunzător se numeşte **inelastic** (vezi Figura 2.3c). Pentru un astfel de sistem relația dintre forța f_S şi deplasarea *u* nu mai este liniară şi depinde de istoria şi direcția de încărcare:

$$f_S = f_S(u, \dot{u}) \tag{2.2}$$

unde $\dot{u}$ reprezintă viteza sistemului (viteză pozitivă semnifică creşterea deformaţiilor, iar viteza negativă – scăderea deformaţiilor).

Răspunsul dinamic al sistemelor inelastice este important deoarece multe structuri au un comportament inelastic sub acţiunea unor mişcări seismice puternice din cauza curgerii, fisurării şi a degradării elementelor structurale.

2.1.3. Forţa de amortizare

Încercări pe sisteme simple cu un singur grad de libertate dinamică au arătat că amplitudinea vibraţiilor unui sistem care este lăsat să vibreze liber scade cu timpul (vezi Figura 2.4). Acest fenomen se datorează **amortizării** sistemului. În cazul unor structuri simple, amortizarea se datorează efectului termic al deformaţiilor ciclice elastice a materialului şi din cauza frecării interioare a materialului. În cazul structurilor reale, există multe alte mecanisme care contribuie la disiparea energiei. Printre acestea se numără frecarea în îmbinările metalice, deschiderea şi închiderea microfisurilor la elementele din beton armat, frecarea între elementele structurale şi cele nestructurale (de exemplu pereţii de compartimentare), etc. În mod practic, este imposibilă descrierea matematică a tuturor acestor fenomene în cazul unor construcţii reale. Ca urmare, amortizarea structurilor reale este reprezentată într-o manieră mult simplificată, folosind o **amortizare vâscoasă echivalentă**.

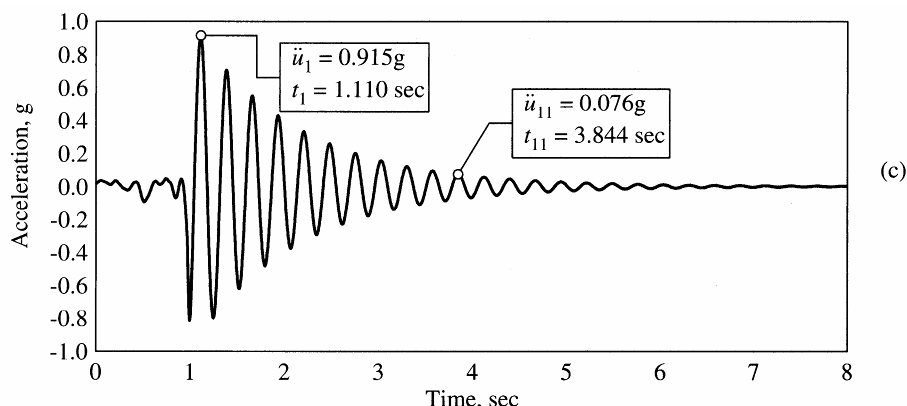


Figura 2.4. Înregistrarea vibraţiilor libere ale unui sistem cu un singur grad de libertate dinamică (Chopra, 2001).

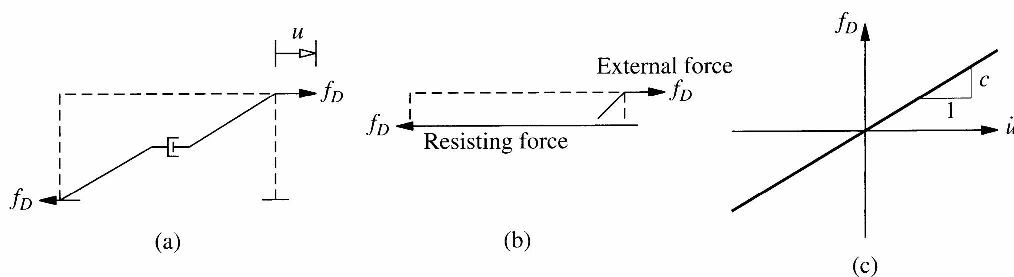


Figura 2.5. Forţa de amortizare (Chopra, 2001)

În Figura 2.5 este reprezentat un amortizor vâscos liniar supus unei forţe f_D de-a lungul gradului de libertate u. Efortul din amortizor este egal şi de sens invers cu forţa exterioară f_D (vezi Figura 2.5b). Relaţia dintre forţa f_D şi viteza de deformare a amortizorului $\dot{u}$ este dată de relaţia (vezi Figura 2.5c):

$$f_D = c \cdot \dot{u} \tag{2.3}$$

unde constanta c este **coeficientul de amortizare vâscoasă**. Unităţile acestuia sunt forţă x timp/lungime.

Coeficientul de amortizare vâscoasă pentru structuri reale poate fi determinat pe baza unor încercări de vibrații libere sau forțate ale unor construcții. Amortizarea vâscoasă echivalentă este folosită pentru modelarea energiei disipate la deformații ale structurii în domeniul elastic. În domeniul inelastic, datorită comportării inelastice a elementelor structurale, se produce o disipare suplimentară de energie, care trebuie cuantificată în mod direct.

2.1.4. Ecuația de mişcare în cazul unei forțe externe

În Figura 2.6 este reprezentat un sistem cu un singur grad de libertate dinamică (SGLD) supus unei forțe dinamice *p(t)* pe direcția gradului de libertate *u*. Atât forța *p(t)*, cât şi deplasarea rezultată *u(t)* variază cu timpul.

Ecuația diferențială care stabileşte deplasarea *u(t)* poate fi determinată prin două metode:

- Folosind legea a 2-a a lui Newton
- Principiul de echilibru dinamic a lui D'Alambert

Legea a 2-a a lui Newton

Forțele care acționează asupra masei *m* la un moment dat sunt: forța perturbatoare *p(t)*, efortul elastic (sau inelastic) f_S şi forța de amortizare f_D (vezi Figura 2.6b). Forța externă *p(t)*, precum şi deplasarea *u(t)*, viteza $\dot{u}(t)$ şi accelerația $\ddot{u}(t)$ sunt pozitive în direcția axei *x* pozitive. Forțele f_S şi f_D sunt arătate în figură acționând în sens invers, deoarece acestea sunt eforturi interioare care se opun deformației, respectiv vitezei.

Forța rezultantă de-a lungul axei *x* este $p - f_S - f_D$, şi folosind legea a 2-a a lui Newton obținem:

$$p - f_S - f_D = m\ddot{u} \tag{2.4}$$

de unde:

$$m\ddot{u} + f_S + f_D = p \tag{2.5}$$

Înlocuind în ecuația (2.5) relațiile (2.1) şi (2.3), această ecuație devine:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{2.6}$$

Aceasta este ecuația de mişcare ce caracterizează deplasarea *u(t)* a sistemului idealizat din Figura 2.6a, presupus a fi liniar elastic, sub acțiunea unei forțe dinamice *p(t)*.

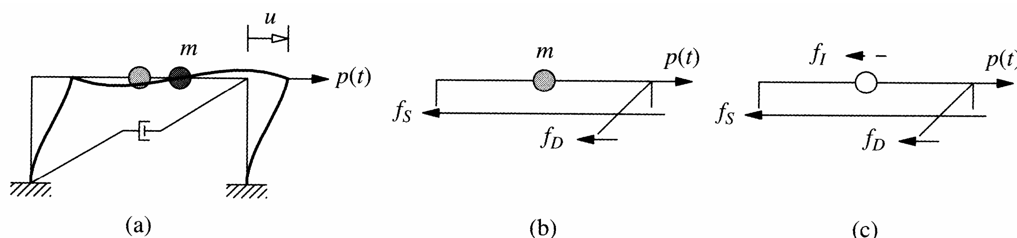


Figura 2.6. Determinarea ecuației de mişcare pe baza unui sistem SGLD (Chopra, 2001).

Principiul lui D'Alambert

Principiul lui D'Alambert se bazează pe noțiunea de forță de inerție, care este egală cu produsul dintre masă şi accelerație şi acționează în sens invers accelerației. Acesta afirmă că un sistem dinamic poate fi considerat ca şi un sistem static echivalent asupra căruia acționează forțele externe şi forța de inerție. Conform principiului lui D'Alambert, un sistem dinamic care include forțele (şi momentele) de inerție este în echilibru la orice moment. În Figura 2.6c este prezentată sistemul de forțe care acționează asupra masei *m*, aceasta fiind înlocuită cu forța de inerție, reprezentată cu linie întreruptă pentru a o distinge de forțele reale. Scriind echilibrul forțelor se obține ecuația (2.5), care a fost obținută anterior folosind legea a 2-a a lui Newton.

Componentele de rigiditate, amortizare şi masă

Ecuaţia de mişcare a unui sistem dinamic poate fi formulată printr-o procedură alternativă. Sub acţiunea forţei exterioare *p(t)*, starea sistemului este descrisă de deplasarea *u(t)*, viteza $\dot{u}(t)$ şi acceleraţia $\ddot{u}(t)$, vezi Figura 2.7a. Acest sistem poate fi vizualizat ca şi combinaţia a trei componente pure: (1) componenta de rigiditate: cadrul fără masă şi fără amortizare (vezi Figura 2.7b); (2) componenta de amortizare: cadrul amortizat, dar fără masă sau rigiditate (vezi Figura 2.7c); şi (3) componenta de masă: masa concentrată la nivelul acoperişului, fără rigiditatea sau amortizarea cadrului (vezi Figura 2.7d).

Relaţia dintre forţa externă f_S şi deplasarea *u* este dată de ecuaţia (2.1) în cazul unui sistem liniar elastic, cea între forţa de amortizare f_D şi viteza $\dot{u}$ de relaţia (2.3), iar forţa de inerţie f_I care acţionează asupra componentei de masă este dată de relaţia $f_I = m\ddot{u}$. Astfel, forţa exterioară *p(t)* poate fi considerată distribuită la cele trei componente ale structurii, iar $f_S + f_D + f_I$ trebuie să egaleze forţa exterioară *p(t)*, ceea ce conduce la ecuaţia de mişcare formulată de relaţia (2.5).

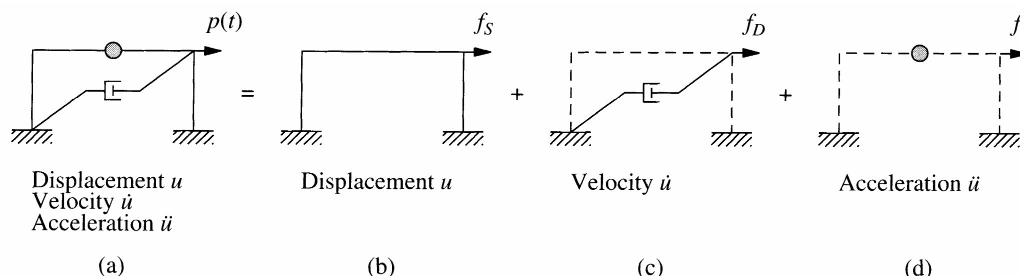


Figura 2.7. Sistemul (a), componenta de rigiditate (b), componenta de amortizare (c) şi componenta de masă (d), Chopra, 2001.

Sistemul cu un singur grad de libertate dinamică idealizat prin cadrul parter din Figura 2.6 este sugestiv în contextul ingineriei civile. În tratatele clasice de mecanică şi fizică, comportarea sistemelor cu SGLD este în general analizată pe baza unui sistem format dintr-o masă, un arc şi un amortizor (vezi Figura 2.8a). Folosind legea a 2-a a lui Newton (vezi Figura 2.8b) sau principiul lui D'Alambert (vezi Figura 2.8c) se obţine aceiaşi ecuaţie de mişcare (2.6) care a fost determinată anterior pentru cadrul parter.

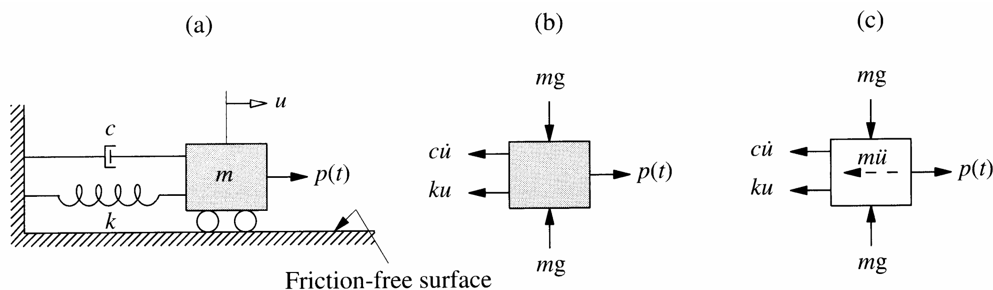


Figura 2.8. Reprezentarea clasică a unui sistem cu un singur grad de libertate dinamică, Chopra, 2001.

2.1.5. Ecuaţia de mişcare în cazul mişcării seismice

În contextul ingineriei seismice, problema principală a dinamicii structurilor este determinarea răspunsului structural sub efectul mişcării seismice care acţionează la baza structurii. Notând deplasarea terenului cu u_g, deplasarea totală (sau absolută) a masei cu u^t şi deplasarea relativă între teren şi masă prin *u* (vezi Figura 2.9), în orice moment se poate scrie următoarea relaţie:

$$u^t(t) = u(t) + u_g(t) \tag{2.7}$$

Atât u^t cât şi u_g se referă la acelaşi sistem inerţial de referinţă, iar direcţiile lor pozitive coincid.

Ecuaţia de mişcare pentru sistemul SGLD din Figura 2.9a poate fi determinată prin oricare dintre metodele descrise în capitolul 2.1.4. În continuare se va folosi principiul de echilibrului dinamic al lui D'Alambert. Pe baza echilibrului forţelor care acţionează asupra sistemului (vezi Figura 2.9b), inclusiv a forţei de inerţie f_I se poate scrie:

$$f_I + f_S + f_D = 0 \tag{2.8}$$

Doar deplasarea relativă u între masă şi baza structurii produce eforturi şi forţe de amortizare în structură (mişcarea de corp rigid nu produce eforturi în structură). Astfel, pentru un sistem liniar elastic relaţiile (2.1) şi (2.3) sunt valabile. Forţa de inerţie f_I este proporţională cu acceleraţia totală $\ddot{u}^t$ a masei:

$$f_I = m\ddot{u}^t \tag{2.9}$$

Înlocuind ecuaţiile (2.1), (2.3) şi (2.9) în ecuaţia (2.8) obţinem:

$$m\ddot{u}^t + c\dot{u} + ku = 0 \tag{2.10}$$

de unde, folosind relaţie (2.7) obţinem:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g \tag{2.11}$$

Comparând ecuaţiile (2.6) şi (2.11) se poate observa că ecuaţiile de mişcare pentru un sistem supus unei mişcări seismice la bază cu acceleraţia $\ddot{u}_g(t)$ este identică cu cea a unui sistem acţionat de o forţă exterioară egală cu $-m\ddot{u}_g(t)$. Astfel, mişcarea seismică la baza structurii poate fi înlocuită cu o **forţă seismică efectivă** (vezi Figura 2.10):

$$p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t) \tag{2.12}$$

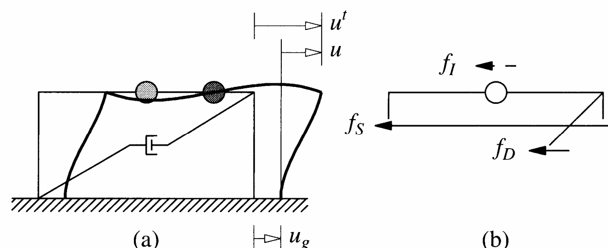


Figura 2.9. Un sistem SGLD suspus mişcării seismice la bază (Chopra, 2001).

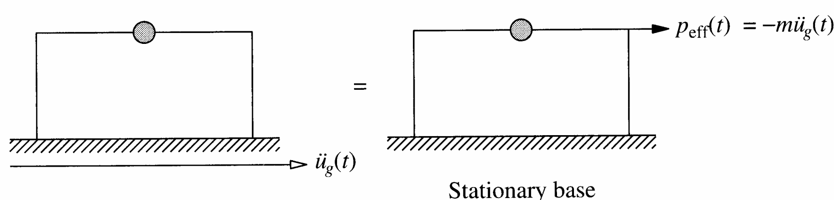


Figura 2.10. Forţa seismică echivalentă (Chopra, 2001).

Forţa seismică efectivă este egală cu produsul dintre masă şi acceleraţie terenului, acţionând în sens invers acceleraţiei. Este important de observat că forţa seismică efectivă depinde de doi factori:

- masa structurii – construcţiile cu masa mai mare fiind supuse unor forţe echivalente mai mari
- acceleraţia terenului – construcţiile amplasate în zone seismice puternice fiind supuse unor forţe efective mai mari

2.1.6. Formularea problemei şi determinarea eforturilor

Problema fundamentală în dinamica structurilor este determinarea răspunsului unui sistem cu un grad de libertate dinamică (în cazul unui sistem liniar elastic definit de masa m, rigiditatea k şi coeficientul de amortizare c) sub efectul unei acţiuni dinamice, care poate fi o forţă dinamică

exterioară *p(t)* sau accelerația terenului aplicată la baza structurii $\ddot{u}_g(t)$. Termenul de **răspuns** se referă într-un sens larg la orice cantitate care defineşte comportarea structurii, cum ar fi deplasarea, viteza, accelerația masei, sau eforturi şi tensiuni în elementele structurii. În cazul unei încărcări seismice, atât valorile totale (sau absolute), cât şi cele relative ale deplasării $u(t)$, vitezei $\dot{u}(t)$ şi accelerației $\ddot{u}(t)$ pot fi necesare. Deplasarea relativă $u(t)$ asociată deformațiilor structurii sunt cele mai importante, deoarece eforturile în elementele structurii sunt în relație directă aceasta.

Prin rezolvarea ecuației de mişcare a sistemului cu un grad de libertate dinamică (de exemplu cadrul parter din exemplele anterioare), se obține variația în timp a deformatei structurii $u(t)$. Pe baza acestor valori, se pot determina eforturile din elementele structurale (momentele de încovoiere, eforturile axiale şi cele tăietoare) printr-o analiză statică a structurii în orice moment de timp dat. Această analiză statică a structurii poate fi vizualizată în două moduri:

- Structura poate fi analizată sub efectul deplasării laterale impuse $u(t)$. Folosind metoda deplasărilor se pot determina rotirile de noduri, iar ulterior eforturile în elementele structurale.
- Cel de-al doilea mod constă în folosirea unei **forțe statice echivalente**, un concept central în determinarea răspunsului seismic al structurilor. La orice moment de timp dat *t*, aceasta este o forță statică exterioară f_S care produce deplasarea *u* determinată din analiza dinamică. Astfel:

$$f_s(t) = ku(t) \tag{2.13}$$

  unde *k* este rigiditatea laterală a structurii. Eforturile din elementele structurale (momentele de încovoiere, eforturile axiale şi cele tăietoare) pot fi determinate în orice moment de timp dat printr-o analiză statică a structurii sub efectul forțelor f_S determinate conform ecuației (2.13).

2.1.7. Combinarea răspunsului static cu cel dinamic

În aplicațiile practice este necesar determinarea eforturilor într-o structură rezultate din combinarea încărcărilor statice (de obicei gravitaționale) existente în structură înainte de aplicarea acțiunii dinamice, cu cele rezultate din acțiunea dinamică. În cazul sistemelor liniar elastice este valabil principiul suprapunerii efectelor, de aceea răspunsul total poate fi determinat prin suprapunerea rezultatelor a două analize separate: (1) analiza statică a structurii sub efectul încărcărilor permanente, utile, variației de temperatură, etc. şi (2) răspunsul dinamic al structurii.

În cazul sistemelor inelastice nu mai este valabil principiul suprapunerii efectelor. Răspunsul dinamic al unor astfel de sisteme trebuie să țină cont de deformațiile şi eforturile existente în structură înainte de aplicarea încărcării dinamice.

2.1.8. Metode de rezolvare a ecuației de mişcare

Ecuația de mişcare a uni sistem liniar elastic cu un singur grad de libertate dinamică este o ecuație diferențială de ordinul doi, determinată anterior:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{2.14}$$

Pentru a defini problema în mod complet trebuie specificate deplasarea inițială $u(0)$ şi viteza inițială $\dot{u}(0)$. De obicei structura este în repaus înainte de aplicarea încărcării dinamice, astfel încât cele două valori sunt egale cu zero. În cele ce urmează sunt trecute în revistă trei metode de rezolvare a ecuației de mişcare.

Soluția clasică

Soluția completă a unei ecuații diferențiale liniare de ordinul doi neomogene *u(t)* este compusă din suma soluției complementară $u_c(t)$ şi a celei particulare $u_p(t)$. Astfel, $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$. Deoarece ecuația diferențială este de ordinul doi, există două constante de integrare în soluția complementară, care pot fi determinate cunoscând condițiile inițiale. Soluția clasică de rezolvare a ecuației de mişcare este deosebit de utilă în cazul vibrațiilor libere şi a celor forțate la care forța dinamică este definită analitic.

Exemplu:

Ecuația de mişcare în cazul unui sistem SGLD neamortizat (*c*=0), sub efectul unei forțe de tip treaptă $p(t)=p_0$, $t \geq 0$ este:

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \quad \text{(a)}$$

Soluția particulară a ecuației (a) este

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \quad \text{(b)}$$

iar soluția complementară este:

$$u_c(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t \quad \text{(c)}$$

unde *A* şi *B* sunt constante de integrare şi $\omega_n = \sqrt{k/m}$.

Soluția completă este dată de suma ecuațiilor (b) şi (c):

$$u(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{p_0}{k} \quad \text{(d)}$$

Dacă sistemul este în repaus înainte de aplicarea încărcării dinamice, pentru *t*=0 avem $u(0) = 0$ şi $\dot{u}(0) = 0$. Pentru aceste condiții inițiale constantele *A* şi *B* pot fi determinate a fi:

$$A = -\frac{p_0}{k} \quad B = 0 \quad \text{(e)}$$

Înlocuind ecuațiile (e) în ecuația (d) rezultă soluția ecuației de mişcare analizate:

$$u(t) = \frac{p_0}{k}(1 - \cos\omega_n t)$$

Integrala Duhamel

O altă modalitate de a determina soluția unei ecuații diferențiale liniare se bazează pe reprezentarea încărcării seismice sub forma unei secvențe de impulsuri infinitezimale. Răspunsul unui sistem sub efectul forței aplicate *p(t)* la timpul *t* se obține ca însumând răspunsul tuturor impulsurilor până în acel moment. Pentru cazul unui sistem SGLD neamortizat aflat în repaus înainte de aplicarea încărcării dinamice, rezultă următoarea relație:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t p(\tau)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau \quad \text{(2.15)}$$

unde $\omega_n = \sqrt{k/m}$. Ecuația (2.15) este cunoscută sub denumirea de **integrală Duhamel** şi reprezintă o formă specială a integralei de convoluție. Ecuația este valabilă numai pentru condiții inițiale "de repaos". Integrala Duhamel reprezintă o metodă alternativă față de metoda clasică de determinare a răspunsului dinamic dacă forța *p(t)* este definită analitic şi este suficient de simplă pentru evaluarea analitică a integralei. Pentru încărcări dinamice definite numeric la valori de timp discrete, integrala Duhamel poate fi integrată numeric.

Exemplu:

Să se determine răspunsul unui sistem SGLD neamortizat (*c*=0), sub efectul unei forțe de tip treaptă $p(t)=p_0,\ t\geq 0$.

Pentru această încărcare dinamică, ecuația (2.15) rezultă:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t p_0\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau = \frac{p_0}{m\omega_n}\left[\frac{\cos\omega_n(t-\tau)}{\omega_n}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{p_0}{k}(1-\cos\omega_n t)$$

Acest rezultat este identic cu cel obținut prin metoda clasică.

Metode numerice

Metodele de rezolvare a ecuației de mişcare descrie anterior sunt aplicabile numai pentru sisteme liniar elastice şi încărcări dinamice definite analitic. Analiza răspunsului dinamic al sistemelor

inelastice şi a celor la care încărcarea dinamică este prea complicată pentru a fi definită analitic, poate fi efectuată prin metode numerice (calcul biografic). Esenţa unui calcul biografic constă în discretizarea încărcării dinamice în paşi mici de timp, şi determinarea răspunsului dinamic în timp al sistemului SGLD prin considerarea unui răspuns liniar în cadrul unui pas de timp.

2.2. Vibraţii libere

Vibraţiile libere ale unei structuri au loc atunci când structura este scoasă din poziţia de echilibru static şi lăsată să vibreze liber fără vre-o forţă dinamică perturbatoare.

2.2.1. Vibraţii libere neamortizate

Mişcarea unui sistem cu un singur grad de libertate dinamică (de exemplu cadrul portal discutat anterior) sub acţiunea unei forţe dinamice *p(t)* este descrisă de ecuaţia (2.6): $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$. În cazul vibraţiilor libere neamortizate forţa perturbatoare lipseşte *p(t)*=0, la fel ca şi amortizarea (c=0). Astfel, ecuaţia de mişcare devine:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \tag{2.16}$$

Vibraţiile libere apar ca urmare a scoaterii sistemului din echilibru static, prin aplicarea masei unei deplasări iniţiale $u(0)$ sau a unei viteze iniţiale $\dot{u}(0)$ la timpul zero, definit ca şi timpul în care este iniţiată mişcarea:

$$u = u(0) \quad \dot{u} = \dot{u}(0) \tag{2.17}$$

Folosind metoda clasică de rezolvare, soluţia ecuaţiei diferenţiale omogene (2.16) folosind condiţiile iniţiale (2.17) este:

$$u(t) = u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{2.18}$$

unde s-a folosit notaţia

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \tag{2.19}$$

Ecuaţia (2.18) este reprezentată în Figura 2.11, din care se poate observa că sistemul efectuează o mişcare oscilatorie faţă de poziţia de echilibru static şi că valoarea deplasării este aceiaşi la fiecare $2\pi/\omega_n$ secunde. Acest tip de mişcare poartă denumirea de **mişcare armonică simplă.** Porţiunea *a-b-c-d-e* a curbei deplasare-timp descrie un ciclu complet de mişcare armonică a sistemului. Din poziţia de echilibru static la punctul *a*, masa se deplasează la stânga, atingând deplasarea pozitivă maximă u_o în punctul *b*, moment în care viteza este egală cu zero şi deplasarea începe să scadă, atingând poziţia de echilibru static în punctul *c*, când viteza devine maximă, astfel încât masa continuă să se deplaseze spre stânga, atingând deplasarea minimă –u_o în punctul *d*, moment în care viteza este din nou egală cu zero iar deplasarea începe să scadă din nou, până când masa ajunge în poziţia de echilibru static *e*.

Timpul în care un sistem cu un singur grad de libertate dinamică efectuează un ciclu complet de oscilaţii libere neamortizate se numeşte **perioadă proprie de vibraţie**, se notează cu T_n şi se măsoară în secunde. Relaţia dintre aceasta şi **frecvenţa circulară proprie** (sau **pulsaţia proprie de vibraţie**), care se măsoară în radiani pe secundă este:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{2.20}$$

Frecvenţa proprie de vibraţie f_n reprezintă numărul de oscilaţii complete pe care le efectuează sistemul într-o secundă, se măsoară în Hz şi este dată de următoarele relaţii:

$$f_n = \frac{1}{T_n} \tag{2.21}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{2.22}$$

Proprietățile de vibrație proprie ω_n, T_n şi f_n depind doar de masa şi rigiditatea structurii, conform ecuațiilor (2.19) la (2.21). Odată cu creştere rigidității unei structuri perioada proprie de vibrație va scădea, iar frecvența proprie de vibrație va creşte. În mod similar, creşterea masei unei structuri conduce la creşterea perioadei proprii de vibrație şi scăderea frecvenței proprii de vibrație. Termenul de **propriu** folosit în definițiile ω_n, T_n şi f_n se referă la faptul că acestea sunt proprietăți proprii ale sistemului,atunci când acesta este lăsat să vibreze liber.

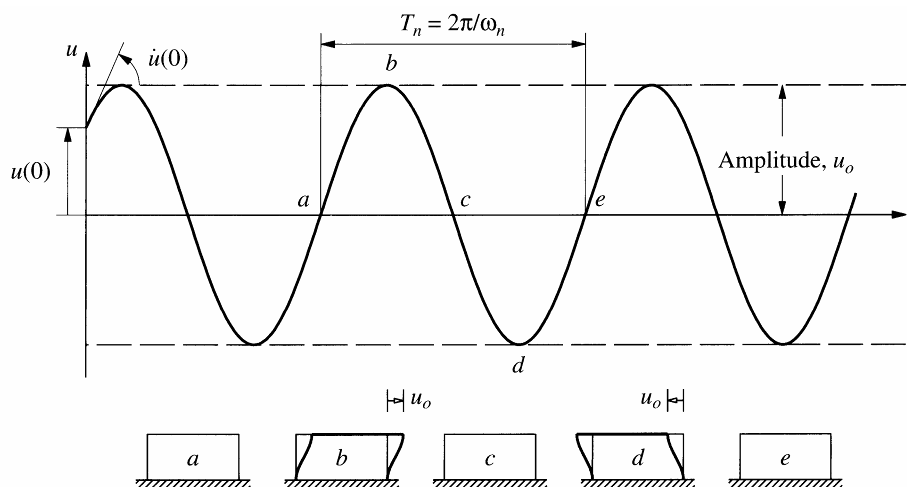


Figura 2.11. Vibrații libere neamortizate ale unui sistem liniar elastic SGLD (Chopra, 2001).

Frecvența circulară proprie ω_n, frecvența proprie de vibrație f_n şi perioada proprie de vibrație T_n pot fi exprimate într-o formă alternativă prin:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \qquad T_n = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} \tag{2.23}$$

unde $\delta_{st} = mg/k$, iar g este accelerația gravitațională. Valoarea δ_{st} reprezintă deformarea elastică a unui sistem SGLD atunci când asupra acestuia acționează o forță statică egală cu mg.

Deplasarea sistemului SGLD variază între valoarea maximă u_0 şi cea minimă $-u_0$. Magnitudinea u_0 pe care o au aceste oscilații se numeşte **amplitudinea** mişcării oscilatorii şi este dată de:

$$u_0 = \sqrt{\left[u(0)\right]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right]^2} \tag{2.24}$$

Amplitudinea oscilațiilor depinde de deplasarea inițială $u(0)$ şi viteza inițială $\dot{u}(0)$, precum şi de proprietățile structurii (ω_n).

2.2.2. Vibrații libere amortizate

Mişcarea unui sistem cu un singur grad de libertate dinamică (de exemplu cadrul portal discutat anterior) sub acțiunea unei forțe dinamice *p(t)* este descrisă de ecuația (2.6): $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$.

În cazul vibrațiilor libere neamortizate forța perturbatoare lipseşte *p(t)*=0, astfel încât ecuația de mişcare (2.6) $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$ devine:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \tag{2.25}$$

Împărțind ecuația (2.25) cu *m* obținem:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \tag{2.26}$$

unde $\omega_n = \sqrt{k/m}$, conform definiției anterioare şi

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{cr}} \tag{2.27}$$

Ne vom referi la valoarea

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_n} \tag{2.28}$$

prin **coeficientul de amortizare critic**, iar ζ este **fracțiunea din amortizare critică**.

Coeficientul de amortizare *c* este o măsură a energie disipate de sistem într-un ciclu de oscilații libere. Pe de altă parte, fracțiunea de amortizare critică ζ este o măsură adimensională a amortizării, proprie unui sistem şi care depinde inclusiv de masa şi rigiditatea sistemului.

Tipuri de mişcare

În Figura 2.12 sunt prezentate deformațiile *u(t)* ale unor sisteme SGLD supuse unei deplasări inițiale *u(0)* pentru trei valori ale ζ. Dacă $c=c_{cr}$ sau $\zeta = 1$, sistemul revine la poziția de echilibru static fără a efectua vre-o oscilație. Dacă $c>c_{cr}$ sau $\zeta > 1$, sistemul revine la poziția de echilibru static fără a efectua vre-o oscilație, la fel ca în cazul $\zeta = 1$, dar mai lent. Dacă $c<c_{cr}$ sau $\zeta < 1$, sistemul oscilează față de poziția de echilibru static cu amplitudini care scad în timp.

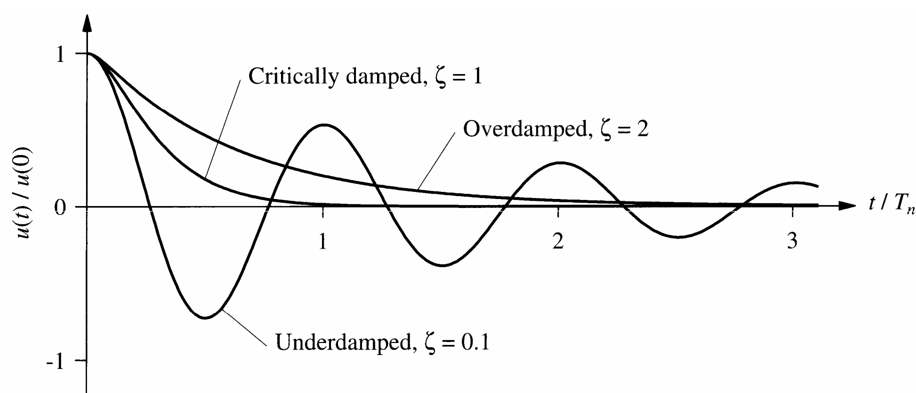


Figura 2.12. Oscilații libere ale unor sisteme cu amortizare subcritică, critică şi supracritică (Chopra, 2001)

Coeficientul c_{cr} se numeşte **coeficient critic de amortizare** deoarece aceasta este valoarea cea mai mică a coeficientului de amortizare care preîntâmpină complet oscilațiile. Acesta delimitează zona dintre mişcarea oscilatorie şi cea neoscilatorie.

Majoritatea structurilor inginereşti (clădiri, poduri, baraje, structuri marine, etc.) sunt caracterizate de o **amortizare subcritică** ($c<c_{cr}$), cu fracțiuni din amortizarea critică sub 0.1. De aceea în continuare ne vom referi doar la acest tip de sisteme, existând puține raționamente pentru studiul dinamicii structurilor cu **amortizare critică** ($c=c_{cr}$) sau a celor cu **amortizare supracritică** ($c>c_{cr}$).

Sisteme cu amortizare subcritică

Soluția ecuației (2.25) ținând cont de condițiile inițiale (2.17) pentru sisteme cu $c<c_{cr}$ sau $\zeta < 1$ este:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u(0)\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t\right] \tag{2.29}$$

unde s-a folosit notația:

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \tag{2.30}$$

Se poate observa că înlocuind $\zeta = 0$ în ecuația (2.29) se reduce la ecuația (2.18), ce caracterizează sisteme neamortizare.

Ecuația (2.29) reprezentând oscilațiile libere ale unui sistem SGLD cu o amortizare $\zeta = 0.05$ sau 5% este prezentată în Figura 2.13. Pentru comparație este inclusă şi reprezentarea oscilațiilor unui sistem SGLD care efectuează oscilații libere neamortizate. Oscilațiile libere sunt inițiate de aceiaşi deplasare inițială $u(0)$ şi viteză inițială $\dot{u}(0)$. Din ecuația (2.29) şi Figura 2.13 se poate observa că **frecvența circulară a oscilațiilor amortizate** este ω_D şi că aceasta depinde de frecvența circulară proprie a oscilațiilor libere neamortizate ω_n prin intermediul relației (2.30). În mod similar, **perioada vibrațiilor forțate** $T_D = 2\pi/\omega_D$ depinde de perioada proprie a oscilațiilor neamortizate T_n prin relația:

$$T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2.31}$$

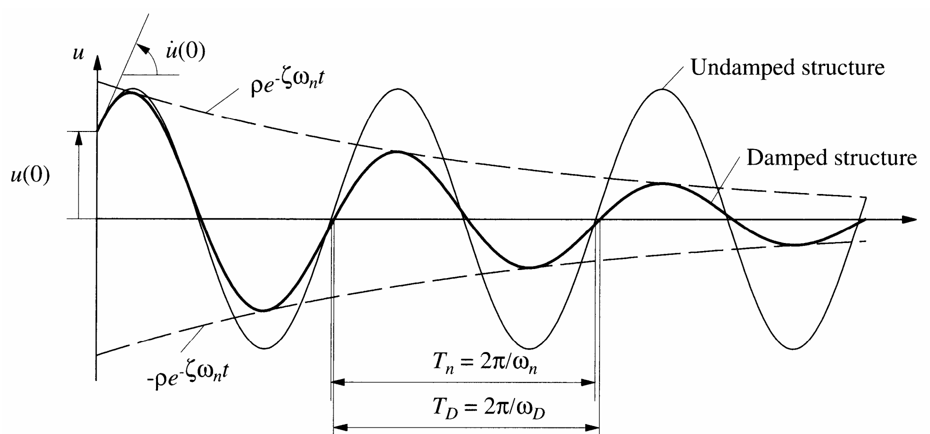


Figura 2.13. Comparație între oscilații libere amortizate şi neamortizate (Chopra, 2001).

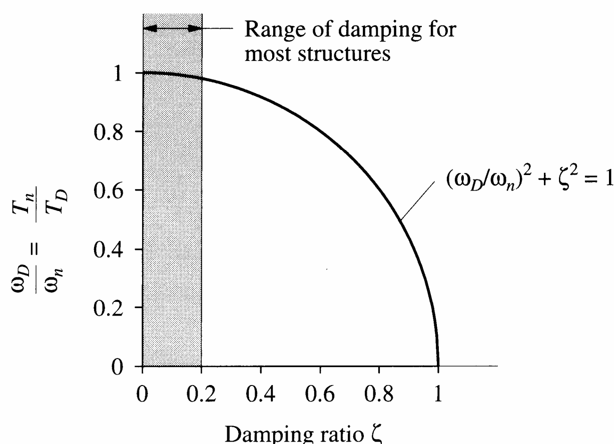


Figura 2.14. Efectul amortizării asupra perioadei proprii de vibrație (Chopra, 2001).

În timp ce amplitudinea oscilațiilor neamortizate este aceiaşi în toate ciclurile, amplitudinea mişcării amortizate scade cu fiecare ciclu de oscilație. Ecuația (2.29) indică faptul că amplitudinea mişcării amortizate scade exponențial cu timpul. înfăşurătoarea mişcării de oscilații amortizate este $\pm\rho e^{-\zeta\omega_n t}$, unde:

$$\rho = \sqrt{\left[u(0)\right]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}\right]^2} \tag{2.32}$$

Amortizarea are ca efect reducerea frecvenţei circulare de la ω_n la ω_D şi de lungire a perioadei de vibraţie de la T_n la T_D. Acest efect este neglijabil pentru fracţiuni din amortizarea critică sub 20% (vezi Figura 2.14), domeniu care include majoritatea structurilor inginereşti.

Efectul mai important al amortizării este cel asupra ratei de atenuare a oscilaţiilor libere, efect exemplificat în Figura 2.15.

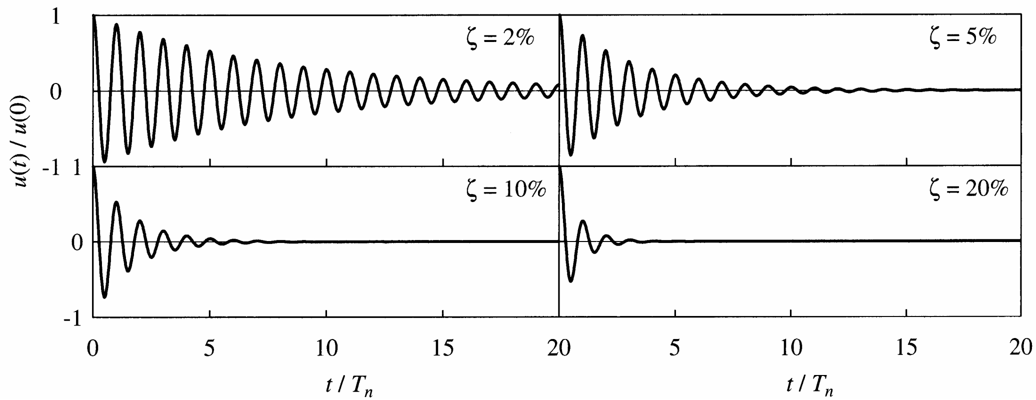


Figura 2.15. Oscilaţii libere pentru patru nivele ale amortizării: $\zeta = 2\%, 5\%, 10\%\ si\ 20\%$

Atenuarea mişcării

În cele ce urmează este analizată relaţia între raportul dintre două vârfuri succesive ale mişcării de oscilaţie amortizată şi fracţiunea de amortizare critică. Raportul dintre valoarea deplasării la timpul *t* şi cea care este înregistrată după o perioadă T_D este independentă de *t*. Acest raport poate fi determinat din ecuaţia (2.29):

$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = \exp\left(\zeta\omega_n T_D\right) \tag{2.33}$$

Folosind ecuaţiile (2.31) şi (2.20) obţinem:

$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{2.34}$$

Ecuaţiile (2.33) şi (2.34) reprezintă în acelaşi timp şi raportul dintre vârfurile succesive ale mişcării oscilatorii (vezi Figura 2.16) u_i/u_{i+1}, deoarece aceste vârfuri au loc la intervale de timp egale cu T_D:

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{2.35}$$

Logaritmul natural al acestui raport este denumit **decrementul logaritmic** şi este notat prin δ:

$$\delta = \ln\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2.36}$$

Pentru valori mici ale fracţiunii din amortizarea critică, $\sqrt{1-\zeta^2} \simeq 1$, ceea ce conduce la relaţia aproximativă:

$$\delta \simeq 2\pi\zeta \tag{2.37}$$

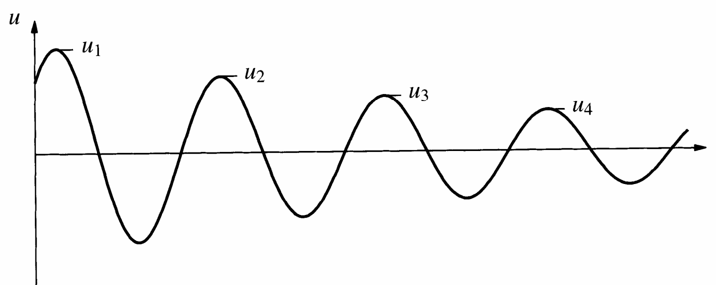


Figura 2.16. Vârfurile unei mişcări oscilatorii amortizate (Chopra, 2001).

În Figura 2.17 sunt indicate relațiile exacte şi aproximative între decrementul logaritmic δ şi fracțiunea de amortizare critică ζ. Se poate concluziona că relația (2.37) este valabilă pentru $\zeta < 0.2$, caz care acoperă majoritatea cazurilor practice.

În cazurile în care atenuarea mişcării are loc lent, datorită unei amortizări mici a structurii, este utilă determinarea decrementului logaritmic pe baza unor vârfuri aflate la câteva perioade. Pe durata a *j* oscilații amplitudinea mişcării se diminuează de la u_1 la u_{1+j}. Acest raport este dat de:

$$\frac{u_1}{u_{1+j}} = \frac{u_1}{u_2}\frac{u_2}{u_3}\frac{u_3}{u_4}\cdots\frac{u_j}{u_{1+j}} = e^{j\delta}$$

De unde:

$$\delta = (1/j)\ln\left(u_1/u_{1+j}\right) \simeq 2\pi\zeta \tag{2.38}$$

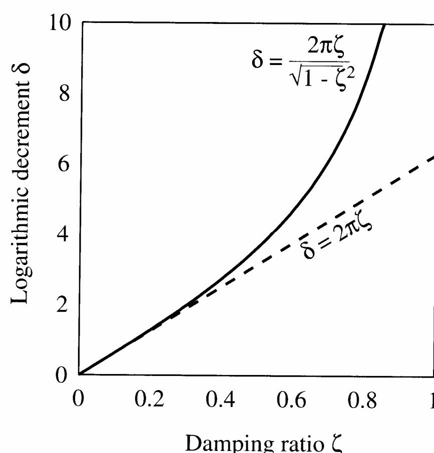


Figura 2.17. Relația exactă şi cea aproximativă între decrementul logaritmic şi fracțiunea de amortizare critică, (Chopra, 2001).

Încercări libere amortizate

Determinarea analitică a fracțiunii din amortizarea critică ζ pentru structuri inginereşti practice nu este posibilă, de aceea această proprietate se terină experimental. Încercări experimentale de oscilații libere amortizate pe structuri reale reprezintă una dintre modalitățile de determinare practică a amortizării. Pentru sisteme cu o amortizare mică, fracțiunea din amortizarea critică poate fi determinată din relațiile:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{u_i}{u_{i+j}} \quad sau \quad \zeta = \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}} \tag{2.39}$$

Prima din aceste relații este echivalentă cu ecuația (2.38), iar cea de-a doua este o relație similară în termeni de accelerație (care este mai uşor de înregistrat decât deplasările), şi care poate fi demonstrată a fi adevărată pentru structuri slab amortizate.